# Delta机器人弹性动力学建模与模态分析

郑坤明[1,2]，张秋菊[1,2]
（1. 江南大学，无锡 214122；2. 江苏省食品先进制造装备技术重点实验室，无锡 214122）

**摘要：目的** 建立Delta机器人弹性动力学模型，研究其动态特性。**方法** 基于有限元理论和Lagrange方程，充分考虑主动臂与从动臂的空间动力学特性与运动协调关系，建立Delta机器人系统弹性动力学模型；根据系统结构参数，制造装配出Delta机器人物理样机，对所建立的弹性动力学模型进行验证分析；利用Ansys Workbench对Delta机器人进行模态分析。**结果** 动平台中心点位移的数值解与试验得到的结果吻合度较好，结合Matlab，对比系统的前6阶固有频率，最大频率误差为3.912%；元件刚性假设前后系统的最大频率误差为1.693%；确定了机器人从动臂为系统的薄弱环节。**结论** 验证了Delta机器人系统弹性动力学模型的正确性及建模过程中静、动平台与转动关节刚性假设的合理性，且改善从动臂的结构参数能提高机器人的整体动态性能，为Delta机器人的结构优化和减振控制提供了理论依据。

**关键词：** Delta机器人；有限元理论；弹性动力学模型；模态分析
**中图分类号：** TB486 **文献标识码：** A **文章编号：** 1001-3563(2015)21-0062-08

## Elastic Dynamic Modeling and Modal Analysis of Delta Robot

*ZHENG Kun-ming*[1,2], *ZHANG Qiu-ju*[1,2]
(1. Jiangnan University, Wuxi 214122, China;
2. Jiangsu Key Laboratory of Advanced Food Manufacturing Equipment & Technology, Wuxi 214122, China)

**ABSTRACT:** This study established the elastodynamic model of Delta robot and analyzed its dynamic characteristics. Based on the finite element theory and lagrange equation, in fully consideration of the active arm and the driven arm′ s spatial dynamic characteristics and motion coordination, the systematic elastic dynamic model of Delta robot was established. According to the structure parameters of the system, the physical prototype of Delta robot was manufactured, and the elastic dynamic model was verified. Then, the Delta robot modal analysis was carried out using Ansys Workbench. The numerical solution of displacement of moving platform was in line with the result of test. Combined with Matlab, compared to the results of numerical calculation and simulation of the first six order natural frequency of the system, the maximum frequency error was 3.912%; compared to before and after element rigid assumptions, the system′ s maximum frequency error was 1.693% , verifying the rationality of static avnd moving platforms and the rotating joint rigid assumptions in the process of elastic dynamics modeling. It was determined that the driven arm robot was the weak link of the system. The weak link needed to be improved to improve the dynamic performance of the whole robot. This study verified the rationality of static and moving platforms and the rotating joint rigid assumptions in the process of elastic dynamics modeling, improved the structure parameters of the driven arm to improve the overall dynamic performance of the

---

**收稿日期：** 2015-03-07
**基金项目：** 教育部中央高校基本科研业务重点专项基金（JUSRP51316B）
**作者简介：** 郑坤明（1989—），男，河南滑县人，江南大学硕士生，主攻并联机器人优化、机械动态分析。
**通讯作者：** 张秋菊（1963—），女，四川乐至县人，江南大学教授、博导，主要研究方向为机械动态分析与优化设计、机械CAD/CAE/CAM/CNC和数控与机器人技术。

robot, and provided theoretical basis for the structural optimization and vibration control of Delta robot.

**KEY WORDS**：Delta robot；finite element theory；elastic dynamic model；modal analysis

Delta机器人作为并联机器人家族的重要一员，常应用于产品自动生产线[1−4]，可对产品进行随机性分拣，并包装和码垛，拥有巨大的市场潜力。随着工业化水平的提高，并联机器人开始向高速、轻型化方向发展。在弹性层面，高速化导致惯性力激振频率升高；轻型化导致杆件柔性加大，固有频率下降。这些因素易引起系统的弹性振动和运动误差，严重影响机构的工作性能，因此，对柔性并联机器人进行弹性动力学研究，分析其动态性能显得尤为重要。

目前，对弹性动力学的研究主要集中在柔性毂–梁机构和柔性二杆机构[5−6]，对柔性并联机器人的研究还处于起步阶段[7]。张清华等[8]基于虚功原理建立了平面3–RRR柔性并联机器人的动力学方程；胡俊峰等[9]提出了一种简单实用的建立一般柔性并联机器人动力学模型的方法。Li等[10]研究了二自由度并联机器人的弹性动力学模型；Majou等[11]对正交结构的直线型Delta机器人进行了子结构动力学参数估计。韩亚峰等[12]采用有限元理论建立了Delta并联机器人柔性构件的运动微分方程。但是，在建立并联机器人弹性动力学模型的过程中，这此研究大都将弹性元件的变形限制在二维平面内，没有充分考虑弹性元件的空间动力学特性与支链的空间运动协调关系，对机构的模态振型分析也很匮乏。

这里以Delta机器人为研究对象，在充分考虑其主动臂与从动臂空间动力学特性与运动关系的基础上，基于有限元理论和Lagrange方程，建立了Delta机器人系统的弹性动力学模型。根据系统的结构参数，制造装配出Delta机器人物理样机，对所建的弹性动力学模型进行了验证分析，在三维建模软件Creo2.0中建立了Delta机器人的实体模型，联合ANSYS Workbench与Matlab对其进行模态分析，验证了弹性动力学建模过程中，静、动平台与转动关节刚性假设的合理性与模型的正确性。对前6阶模态振型进行分析，发现从动臂为Delta机器人系统的薄弱环节，应重点改善从动臂的动态特性。

## 1　Delta机器人系统描述

Delta机器人的结构示意见图1。系统由静平台$A_1A_2A_3$、动平台$C_1C_2C_3$、主动臂$A_iB_i$、从动臂$B_iC_i$（$i$=1，2，3）组成。主动臂与静平台之间用转动关节连接，主动臂与从动臂、从动臂与动平台之间以虎克铰的形式连接，这里虎克铰由2个轴线相互垂直的转动关节代替。在静、动平台的中心处，分别建立系统坐标系$O-XYZ$与局部坐标系$p-xyz$，见图1。设动平台中心$p$相对于坐标系$O-XYZ$的坐标为$(x,y,z)$；主动臂的分布角为$\theta_i$，$\theta_i$是$OA_i$或者$pC_i$与$X$轴正方向之间的夹角；$\alpha_i$为主动臂输入角度；$l_a$，$l_b$分别为主、从动臂的长度；$R$，$r$分别为静、动平台外接圆半径。

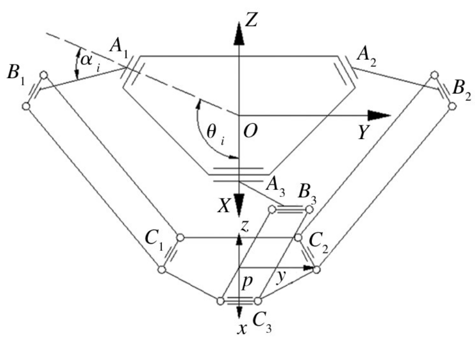



图1　Delta机器人结构

Fig.1 Schematic configuration of Delta robot

## 2　Delta机器人弹性动力学建模

### 2.1　典型空间梁单元弹性动力学模型

典型空间梁单元的有限元模型见图2。在图2中，单元坐标系为固定坐标系$O_1-xyz$。节点$O_1$，$O_2$分别位于梁单元前后2个端面的几何中心点处。根据空间柔性梁单元弹性变形性质，用$\delta=[\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_{18}]^{\mathrm{T}}$表示梁单元的广义坐标向量，其中，各分量分别表示单元节点处的弹性位移、弹性转角和曲率。设$\boldsymbol{S}_x(x,t)$，$\boldsymbol{S}_y(x,t)$，$\boldsymbol{S}_z(x,t)$；$\boldsymbol{\varphi}_x(x,t)$，$\boldsymbol{\varphi}_y(x,t)$，$\boldsymbol{\varphi}_z(x,t)$分别表示梁单元模型沿$x$、$y$、$z$轴的弹性位移与绕$x$、$y$、$z$轴的弹性角位移。参考文献[13]，选择合适的插值函数。可得：$\boldsymbol{S}_x(x,t)=\boldsymbol{N}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{S}_y(x,t)=\boldsymbol{N}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{S}_z(x,t)=\boldsymbol{N}_C^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{\varphi}_x(x,t)=\boldsymbol{N}_D^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{\varphi}_y(x,t)=(\frac{\partial \boldsymbol{N}_C}{\partial x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{\varphi}_z(x,t)=(\frac{\partial \boldsymbol{N}_B}{\partial x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}$。其中，$\boldsymbol{N}_A$，$\boldsymbol{N}_B$，$\boldsymbol{N}_C$，$\boldsymbol{N}_D$为插值向量，令$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{N}_A\ \boldsymbol{N}_B\ \boldsymbol{N}_C\ \boldsymbol{N}_D]$。

#### 2.1.1　空间梁单元动能

经分析知，单元的弹性变形较小，因而可忽略刚体

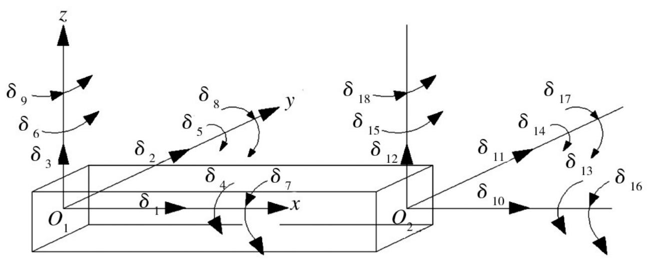



图2 典型空间梁单元有限元模型

Fig.2 Finite element model of typical spatial beam

运动与弹性变形运动间的耦合关系，将任意点处的绝对位移看作刚体位移与弹性位移的叠加。设$\boldsymbol{S}_{ax}(x,t)$，$\boldsymbol{S}_{ay}(x,t)$，$\boldsymbol{S}_{az}(x,t)$分别为沿$x$，$y$，$z$轴的绝对位移，$\boldsymbol{\varphi}_{ax}(x,t)$为绕$x$轴的绝对角位移，则单元的动能可表示为[13]：

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{2}\int_0^L m(x)\left[\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}_{ax}(x,t)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}_{ay}(x,t)}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{S}_{az}(x,t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^L \rho I_p\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}_{ax}(x,t)}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}x \tag{1}$$

式中：$L$，$\rho$分别为单元长度和密度；$m(x)$为单元质量分布函数；$I_p$为单元横截面对$x$轴的极惯性矩。

化简式(1)得：

$$\boldsymbol{T}=\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{r}}+\dot{\boldsymbol{\delta}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}(\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{r}}+\dot{\boldsymbol{\delta}}) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}=\rho A\int_0^L \boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x \tag{3}$$

式中：$\dot{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{r}}$，$\dot{\boldsymbol{\delta}}$分别为单元的刚体速度和弹性速度；$\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}$为单元质量矩阵；$A$为单元横截面面积。

2.1.2 空间梁单元变形能

根据材料力学知识，可得梁单元模型总变形能为：

$$\boldsymbol{V}=\frac{1}{2}E\int_0^L\left[A\left(\frac{\partial\boldsymbol{S}_x(x,t)}{\partial x}\right)^2+I_z\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{S}_y(x,t)}{\partial x^2}\right)^2+I_y\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{S}_z(x,t)}{\partial x^2}\right)^2\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^L GI_p\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_{ax}(x,t)}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x \tag{4}$$

式中：$E$，$G$分别为材料拉压、剪切弹性模量；$I_y$，$I_z$分别为梁单元横截面对$y$，$z$轴的主惯性矩。

化简式(4)得：

$$\boldsymbol{V}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{\delta} \tag{5}$$

式中：$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}$为单元的刚度矩阵，且：

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}=E\left[A\int_0^L\dot{\boldsymbol{N}}_A\dot{\boldsymbol{N}}_A^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x+I_z\int_0^L\ddot{\boldsymbol{N}}_B\ddot{\boldsymbol{N}}_B^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x+I_y\int_0^L\ddot{\boldsymbol{N}}_C\ddot{\boldsymbol{N}}_C^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x\right]+GI_p\int_0^L\dot{\boldsymbol{N}}_D\dot{\boldsymbol{N}}_D^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x \tag{6}$$

2.1.3 空间梁单元弹性动力学方程

将式(1)(4)代入拉格朗日方程，可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial\dot{\boldsymbol{\delta}}}\right)-\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial\boldsymbol{\delta}}+\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial\boldsymbol{\delta}}=\boldsymbol{F} \tag{7}$$

对式(7)进行整理，知梁单元模型的弹性动力学方程为[14]：

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}\ddot{\boldsymbol{\delta}}+\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}} \tag{8}$$

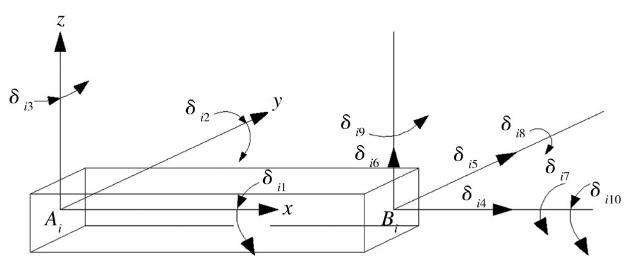
式中：$\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}$为梁单元模型的广义力列向量。$\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}\in\boldsymbol{R}^{18\times18}$，$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}\in\boldsymbol{R}^{18\times18}$，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}\in\boldsymbol{R}^{18\times1}$。

## 2.2 支链弹性动力学模型

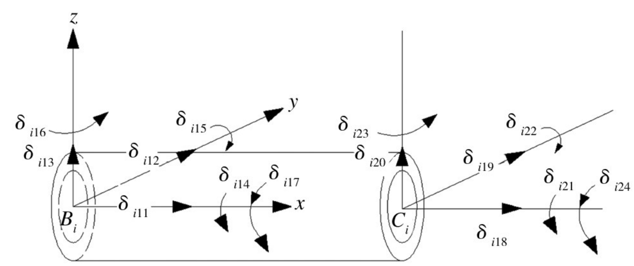
2.2.1 单元坐标系中支链弹性动力学方程

选择矩形截面空间梁单元作为主动臂基本梁单元模型，选择环形截面空间梁单元作为从动臂基本梁单元模型。静、动平台与转动关节的刚度远大于主、从动臂的刚度。因此，在系统的弹性动力学分析中，将静、动平台与转动关节看作刚性元件，忽略其运动过程中的弹性变形，主、从动臂视为柔性元件考虑其在运动过程中的弹性变形。其假设的合理性将在后面给出明确的分析验证。

将主动臂$A_iB_i$视为空间悬臂梁，则节点$A_i$的弹性位移和转角位移均为0。节点$B_i$，$C_i$处为虎克铰，这里将虎克铰分解为2个轴线相互垂直的转动副组合，绕转动副轴线方向的曲率为0。则主动臂$A_iB_i$的广义坐标为10个，从动臂$B_iC_i$的广义坐标为14个。主动臂与从动臂的空间梁单元有限元模型见图3。



a 主动臂



b 从动臂

图3 空间梁单元有限元模型

Fig.3 Finite element model of spatial beam

根据式(8)分别得到主动臂与从动臂的弹性动力

学方程为：

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}^{i1}\ddot{\boldsymbol{\delta}}^{i1} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}^{i1}\boldsymbol{\delta}^{i1} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}^{i1} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}^{i2}\ddot{\boldsymbol{\delta}}^{i2} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}^{i2}\boldsymbol{\delta}^{i2} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}^{i2} \tag{10}$$

式中，$i_1$，$i_2$分别为第$i$条支链的主、从动臂；$\boldsymbol{\delta}^{i1}$，$\boldsymbol{\delta}^{i2}$分别为主、从动臂的弹性变形，并且$\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}^{i1}\in\boldsymbol{R}^{10\times10}$，$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}^{i1}\in\boldsymbol{R}^{10\times10}$，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}^{i1}\in\boldsymbol{R}^{10\times1}$；$\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}^{i2}\in\boldsymbol{R}^{14\times14}$，$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}^{i2}\in\boldsymbol{R}^{14\times14}$，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}^{i2}\in\boldsymbol{R}^{14\times1}$。

将式(9)(10)组合可得支链的动力学方程为：

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}^{i}\ddot{\boldsymbol{\delta}}^{i} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}^{i}\boldsymbol{\delta}^{i} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}^{i} \tag{11}$$

式中：$\delta^i=[\delta_{i1},\delta_{i2},\cdots,\delta_{i24}]^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^{24\times1}$；$\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}^{i}\in\boldsymbol{R}^{24\times1}$；$\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}^{i}\in\boldsymbol{R}^{24\times24}$；$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}^{i}\in\boldsymbol{R}^{24\times24}$。

支链的有限元模型见图4。

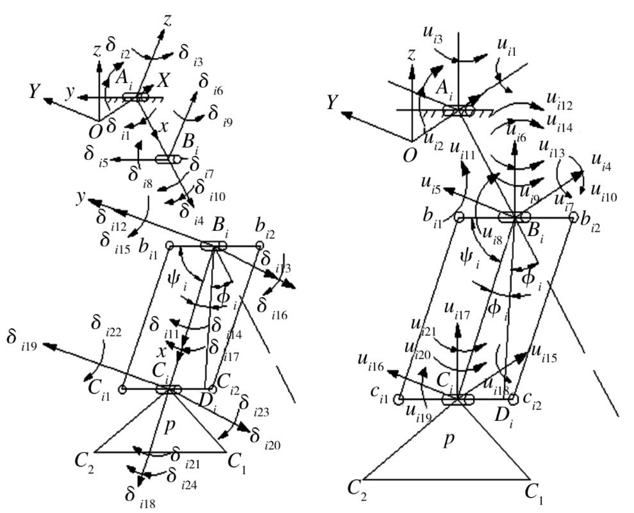


图4　支链的有限元模型

Fig.4 Finite element model of branched chain

### 2.2.2　系统坐标系中支链弹性动力学方程

以支链3为例，即$i$=3。为分析方便，得到系统坐标系中支链的有限元模型见图4。其中，$\varphi_i$为主动臂$A_iB_i$与从动臂平面$b_{i1}b_{i2}c_{i1}c_{i2}$的夹角；$B_iD_i$为主动臂$A_iB_i$的延长线在从动臂平面$b_{i1}b_{i2}c_{i1}c_{i2}$上的投影；$\psi_i$为从动臂横轴$b_{i1}b_{i2}$与$B_iC_i$的夹角；$\Phi_i$是从动臂$B_iC_i$与$B_iD_i$的夹角。$\varphi_i$，$\psi_i$，$\Phi_i$都是随Delta机器人的位形变化角度值，可对Delta机器人进行运动学分析得到其变化规律：

$$\varphi_i = \arccos\left(\frac{\lambda_{i1}^2 + \lambda_{i2}^2 - l_a^2 - l_b^2}{2l_al_b}\right) \tag{12}$$

式中：$\lambda_{i1} = \frac{r}{2}[2(\sin\theta_i)^2 + 2(\cos\theta_i)^2 - 2] + y\cos\theta_i - x\sin\theta_i$；$\lambda_{i2} = z$。

$$\psi_i = \pi - \frac{\arccos(\overline{B_iC_i}\cdot\overline{C_{i-2}C_{i-1}})}{|\overline{B_iC_i}|\cdot|\overline{C_{i-2}C_{i-1}}|}\;;\varphi_i = \frac{\pi}{2} - \psi_i \tag{13}$$

则系统坐标系$O-XYZ$到主动臂单元坐标系$A_i-xyz$的姿态变换矩阵为：

$$\boldsymbol{R}_{i1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i\cos\theta_i & \sin\alpha_i\cos\theta_i & -\sin\alpha_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 \\ \cos\alpha_i\sin\theta_i & \sin\alpha_i\sin\theta_i & \cos\alpha_i \end{bmatrix} \tag{14}$$

系统坐标系到从动臂单元坐标的姿态变换矩阵为：

$$\boldsymbol{R}_{i2} = \begin{bmatrix} R_{i211} & R_{i212} & R_{i213} \\ R_{i221} & R_{i222} & R_{i223} \\ R_{i231} & R_{i232} & R_{i233} \end{bmatrix} \tag{15}$$

式中：$R_{i211}=\cos\varphi_i\,(\sin\varphi_i\sin\alpha_i+\cos\varphi_i\cos\alpha_i\cos\theta_i+\sin\varphi_i\cos\alpha_i\sin\theta_i)$；$R_{i212}=\sin\varphi_i\cos\theta_i-\cos\varphi_i\cos\varphi_i\cdot\sin\theta_i$；$R_{i213}=\sin\varphi_i\sin\alpha_i\sin\theta_i-\cos\varphi_i\,(\sin\varphi_i\sin\alpha_i-\cos\varphi_i\cdot\cos\theta_i\sin\alpha_i)$；$R_{i221}=\cos\varphi_i\cos\alpha_i\sin\theta_i-\sin\varphi_i\,(\sin\varphi_i\cdot\sin\alpha_i+\cos\varphi_i\cos\alpha_i\cos\theta_i)$；$R_{i222}=\cos\varphi_i\cos\theta_i+\sin\varphi_i\cdot\sin\varphi_i\sin\theta_i$；$R_{i223}=\sin\varphi_i\sin\varphi_i\cos\alpha_i-\cos\varphi_i\cos\theta_i\sin\alpha_i+\cos\varphi_i\sin\alpha_i\sin\theta_i$；$R_{i231}=\sin\varphi_i\cos\alpha_i\cos\theta_i-\cos\varphi_i\cdot\sin\alpha_i$；$R_{i232}=\sin\varphi_i\sin\theta_i$；$R_{i233}=\cos\varphi_i\cos\alpha_i+\sin\varphi_i\cdot\cos\theta_i\sin\alpha_i$。

那么，由式(14)(15)可得支链$i$的单元广义坐标与系统广义坐标之间的转换关系为：

$$\boldsymbol{\delta}^i = \boldsymbol{B}_i\boldsymbol{U}_i \tag{16}$$

式中：$\boldsymbol{B}_i\in\boldsymbol{R}^{24\times21}$，为支链$i$的单元广义坐标与系统广义坐标之间的姿态转换矩阵。

将式(16)代入式(11)，得到支链在系统坐标下的弹性动力学方程为[13]：

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}^{i}\ddot{\boldsymbol{U}}_i + \boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}^{i}\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}^{i} \tag{17}$$

式中：$\boldsymbol{U}_i=[U_{i1},U_{i2},\cdots,U_{i21}]_{21\times1}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}^{i}\in\boldsymbol{R}^{21\times21}$，为支链$i$的质量矩阵；$\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}^{i}\in\boldsymbol{R}^{21\times21}$，为支链$i$的刚度矩阵；$\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}^{i}\in\boldsymbol{R}^{21\times1}$，为支链$i$所受的广义力列阵。

## 2.3　Delta机器人系统弹性动力学模型

### 2.3.1　运动学与动力学约束

根据并联机器人的结构特点，参考文献[10]，设$\boldsymbol{\delta}_p$为由支链的弹性变形引起的动平台的位姿在$p-xyz$中的改变量，点$C_i$在$O-XYZ$中的弹性位移坐标为$\boldsymbol{U}_{ci}$，可得系统坐标系下动平台的运动学约束条件为：

$$\boldsymbol{U}_{ci} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z_{ci} & -y_{ci} \\ 0 & 1 & 0 & -z_{ci} & 0 & x_{ci} \\ 0 & 0 & 1 & y_{ci} & -x_{ci} & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_p \tag{18}$$

式中：$x_{ci}$，$y_{ci}$，$z_{ci}$为$C_i$点在系统坐标系下的坐标。

另外，设由支链弹性变形引起动平台的位移改变量在$O-XYZ$中的坐标为$\boldsymbol{U}_p$。$\boldsymbol{M}_p$，$\boldsymbol{F}_p$分别为动平台在$p-xyz$中的质量矩阵与所受的广义力列阵；$\boldsymbol{T}_p$为$p-xyz$到$O-XYZ$的坐标系转换矩阵。

可得系统坐标系下动平台的动力学约束条件为：

$$\boldsymbol{T}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_p\boldsymbol{T}_p\ddot{\boldsymbol{U}}_p = \boldsymbol{T}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_p \tag{19}$$

2.3.2 系统弹性动力学方程

取$\boldsymbol{U}_i^* = [u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{i4}, u_{i8}, u_{i9}, u_{i20}, u_{i21}, u_{p1}, u_{p2}, \cdots, u_{p6}]^{\mathrm{T}}_{24\times1}$，则由运动学约束条件式(18)可得：

$$\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{T}_i\boldsymbol{U}_i^* \tag{20}$$

式中：$\boldsymbol{U}_i=[u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{i21}]^{\mathrm{T}}_{21\times1}$；$\boldsymbol{T}_i$为坐标协调矩阵，且$\boldsymbol{T}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{14\times14} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{W}_i\\ 0 & \boldsymbol{E}_{4\times4} & 0\end{bmatrix}_{21\times24}$。

将式(20)代入式(17)得：

$$\boldsymbol{M}_i\ddot{\boldsymbol{U}}_i^* + \boldsymbol{K}_i\boldsymbol{U}_i^* = \boldsymbol{F}_i \tag{21}$$

式(21)为用坐标向量表示的支链弹性动力学方程，其中，$\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\mathrm{e}}^i\boldsymbol{T}_i$，$\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\mathrm{e}}^i\boldsymbol{T}_i$，$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}^i$。

通过式(18)(19)与式(21)，将动平台与各个支链的动力学方程装配到一起：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F} \tag{22}$$

式中：$\boldsymbol{M}_{60\times60}$为系统总质量矩阵；$\boldsymbol{K}_{60\times60}$为系统总刚度矩阵；$\boldsymbol{C}_{60\times60}=\lambda_1\boldsymbol{M}+\lambda_2\boldsymbol{K}$为系统总阻尼矩阵；$\lambda_1$，$\lambda_2$为Rayleigh阻尼比例系数；$\boldsymbol{F}_{60\times1}$为系统所受的广义力列阵；$\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{U}_3^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{U}_p^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}_{60\times1}$，为弹性位移在系统坐标系下的坐标。至此，建立了Delta并联机器人的弹性动力学模型。

## 3 系统动力学验证与模态分析

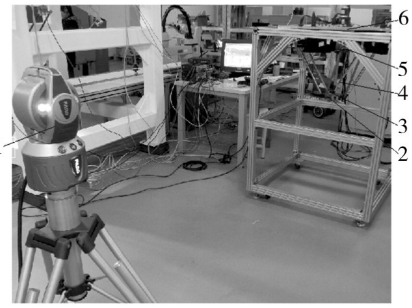
### 3.1 系统动力学模型验证

已知系统参数：主动臂与从动臂的材质均为铝合金，密度$\rho$=2700 kg/m$^3$，拉压弹性模量$E$=70 GPa，剪切弹性模量$G$=2.65×10$^{10}$ N/m$^2$；$l_a$=0.2 m，$l_b$=0.2 m，矩形截面的主动臂宽与高相等$b$=$h$=25 mm，环形截面的从动臂外径$D$=16 mm，内径$d$=14 mm；动平台质量$m_p$=1.087 kg；静平台外接圆半径$R$=150 mm，动平台外接圆半径$r$=85 mm；$\lambda_1$=2.0×10$^{-3}$，$\lambda_2$=3.0×10$^{-4}$；$\Delta t$=0.01 s，$T$=1 s。

给定动平台中心的运动规律：

$$\begin{cases}x = 50\cos(2\pi t)\\ y = 50\sin(2\pi t)\\ z = -400\end{cases}$$

由系统参数，加工装配出Delta机器人物理样机，并利用FARO Vantage激光跟踪仪测量动平台实际位置点，见图5。




1.FARO激光跟踪仪 2.动平台 3.靶球与激光束 4.从动臂 5主动臂 6.静平台

图5 FARO激光跟踪仪测量物理样机动平台运动轨迹

Fig.5 FARO laser tracker measuring moving platform

对FARO Vantage激光跟踪仪测得的动平台的实际位置数据进行导出处理。得到动平台中心点在$x$，$y$，$z$方向的实际位移，这里用Newmark法在Matlab中对式(22)进行求解，得到动平台中心点位移的数值解。将试验得到的结果与数值解相对比，见图6。

综上所述，根据弹性动力学模型，利用Matlab数值求解得到动平台中心位置的数值解，并与Delta机器人物理样机试验运行得到的动平台中心点实际位置结果相比较，发现吻合度较好，验证了Delta机器人弹性动力学模型的正确性。另外，经分析发现，动平台$x$，$y$，$z$方向的位移曲线都是沿其理想运动轨迹的往复振动，而这些振动主要是由杆件的柔性引起的，说明Delta机器人实际上是典型的弹性振动系统。

### 3.2 系统模态分析

由式(22)可以得到Delta机器人系统的特征方程：

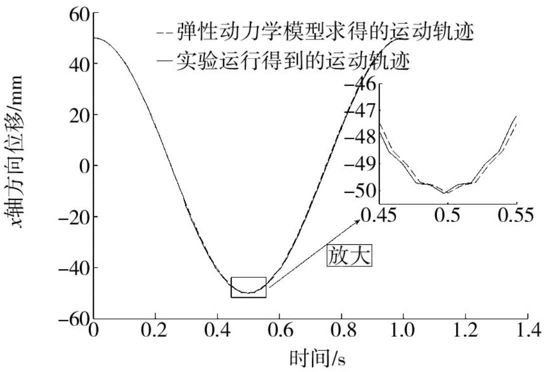
$$|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}|=0 \tag{23}$$

式中：$\omega^2$称为特征值。把由式(23)求解出的60个特征值中的$\omega_i^2$按升序排列为：

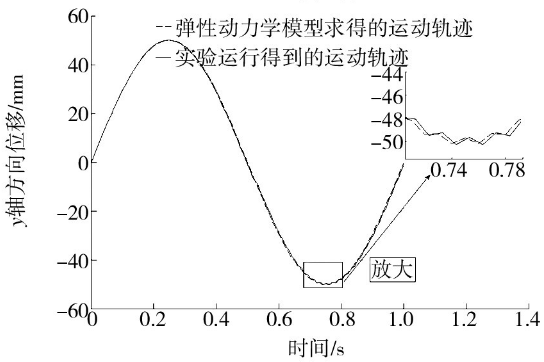
$$0 < \omega_1^2 \leqslant \omega_2^2 \leqslant \cdots \leqslant \omega_{60}^2$$

把第$i$个特征值$\omega_i^2$的算术平方根$\omega_i$称为第$i$阶固有圆频率。通常情况下，以$f_i=\omega_i/2\pi$表征系统的振动频率。

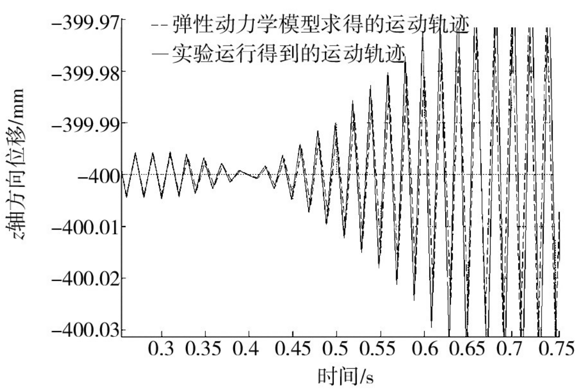
为了验证弹性动力学建模过程中刚性假设的合理性与模型的正确性，在Creo 2.0中建立Delta机器人




a x轴方向




b y轴方向




c z轴方向

图6 动平台位移曲线

Fig.6 The displacement curve of moving platform

的三维实体模型,并对其进行适当的简化,将此模型导入Ansys Workbench中进行模态分析。由于Delta机器人的质量矩阵和刚度矩阵与其运动位姿有关,为了分析验证方便,这里取当动平台中心位置坐标$p=(0,0,-400)$时Delta机器人的位姿进行仿真分析。

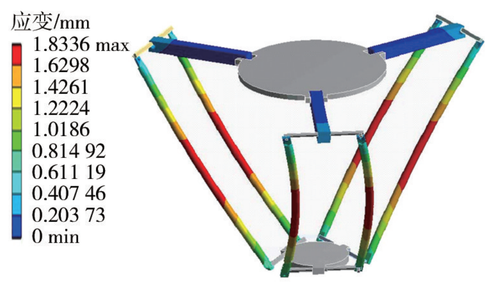
在对Delta机器人系统进行弹性动力学分析时曾有过这样的假设:将静、动平台与转动关节看做刚性元件,忽略其运动过程中的弹性变形,主、从动臂视为柔性元件,考虑其在运动过程中的弹性变形。据此在Workbench中对Delta机器人进行2种方式的网格划分[15],见图7。分别对其进行模态分析,得到的振型云图见图8和图9。

a 将静、动平台与转动关节视为刚体

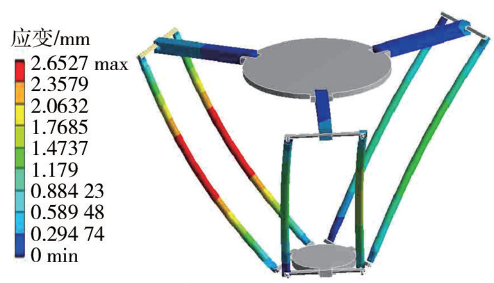
b 将静、动平台与转动关节视为柔体

图7 网格划分

Fig.7 Mesh rezoning




a 第4阶模态




b 第5阶模态


c 第6阶模态

图8 将静、动平台与转动关节视为刚体的模态振型

Fig.8 Modal shape chart when the static, moving platform and the rotating joint are regarded as rigid body

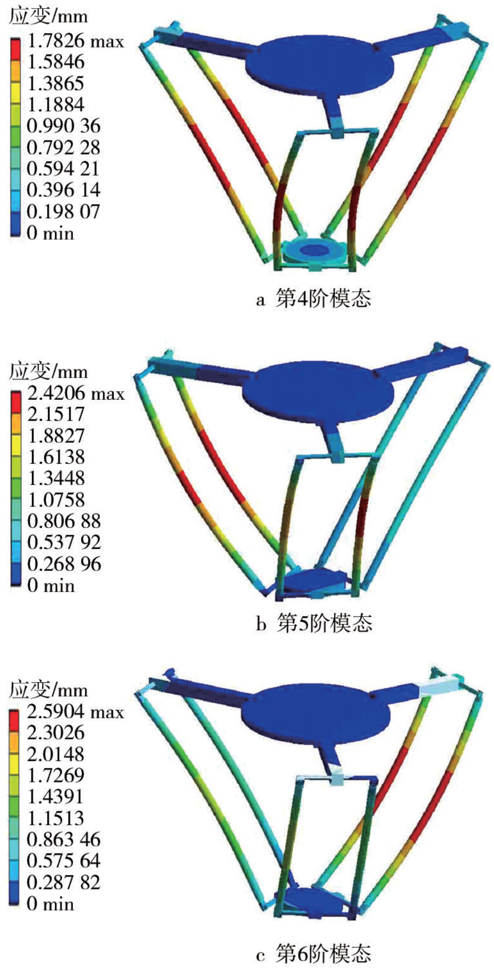



图9 将静、动平台与转动关节视为柔体的模态振型

Fig.9 Modal shape chart when the static, moving platform and the rotating joint are regarded as flexible body

因为Delta机器人有沿$x$,$y$,$z$方向的3个平移自由度，所以前3阶固有频率都近乎为0，取前0阶非零固有频率的模态进行分析，即取第4阶模态到第6阶模态，见表1。

其中，频率(a)为将静、动平台与转动关节设置为刚体时Delta机器人系统的频率；频率(b)为将静、动平台与转动关节设置为柔体时Delta机器人系统的频率。

由图8、图9及表1可见，静、动平台与转动关节的刚性假设，对Delta机器人的固有频率和模态振型影响甚微，验证了此前刚性假设的合理性。以此为根据，在对系统进行弹性动力学分析时可适当减少弹性元件的数目，在不影响分析精确度的前提下大大简化了分析与求解的过程，提高了计算效率。另外，Delta机器人的前3阶非零模态振型主要是3组从动臂的变形，这是由于从动臂相对于主动臂来说是长径比较大的细长杆、柔性大，更易引起振动变形。因此，在对Delta机器人进行减振优化时，应重点考虑改善从动臂的动态特性。

根据推导的Delta机器人系统弹性动力学模型，在Matlab中求得前6阶固有频率的数值计算结果，与Workbench中的仿真结果进行对比，见表2。

**表2 数值计算与仿真结果频率对比**

**Tab.2 Comparison of the results of numerical calculation and simulation of frequency**

| 阶数 | 数值计算频率/Hz | 仿真结果频率(a)/Hz | 频率误差/% |
|---|---|---|---|
| 1~3 | 近乎为0 | 近乎为0 | |
| 4 | 140.22 | 145.93 | 3.912 |
| 5 | 143.70 | 147.40 | 2.510 |
| 6 | 144.87 | 147.48 | 1.770 |

由表2可以看出，Matlab数值计算结果与Workbench仿真结果非常接近，最大误差不超过4%，进一步验证了Delta机器人系统动力学模型的正确性。

另外，发现数值计算结果比仿真结果小，究其原因主要是：为使Delta机器人的三维实体模型在Workbench中能够顺利地分析运算，对其结构进行了适当的简化，主要是零件连接部位的简化，又因零件连接处是机械系统较易引起振动变形、刚度较小的部位，对其进行简化间接提高了机器人系统的整体刚度。

## 4 结语

以Delta机器人为研究对象，基于有限元理论与Lagrange方程，建立了其弹性动力学模型，并根据系统的结构参数，制造装配出Delta机器人物理样机，对所建的弹性动力学模型进行了验证分析。联合Ansys

**表1 频率对比与振型描述**

**Tab.1 Comparison of frequency and vibration type description**

| 阶数 | 频率(a)/Hz | 频率(b)/Hz | 频率误差/% | 振型描述 |
|---|---|---|---|---|
| 1~3 | 近乎为0 | 近乎为0 | | 刚体模态 |
| 4 | 145.93 | 143.50 | 1.693 | 3个从动臂绕Z轴扭转 |
| 5 | 147.40 | 145.95 | 0.993 | 3个从动臂绕沿各自的主动臂方向前后摆动 |
| 6 | 147.48 | 146.02 | 0.999 | 3个从动臂绕沿各自的主动臂方向前后左右摆动 |

Workbench与Matlab对Delta机器人进行了模态分析。

1)将动平台中心点沿$x$,$y$,$z$方向的数值解与试验得到的结果相对比,发现二者随时间的变化趋势大致相同,验证了所建弹性动力学模型的正确性。

2)动平台中心点$x$,$y$,$z$方向的位移曲线都是沿理想运动轨迹往复振动,说明含柔性构件的Delta机器人实际上是典型的弹性振动系统。

3)静、动平台与转动关节的刚性假设对Delta机器人的固有频率和模态振型影响甚微,以此为依据,在对系统进行弹性动力学建模时可适当地减少弹性元件的数目,在不影响分析精确度的前提下,大大简化了分析与求解过程,提高了计算效率。

4)对Delta机器人整机模态的分析发现,前3阶非零模态振型主要是3组从动臂的变形,可知从动臂为系统的薄弱环节,应重点考虑改善从动臂的动态特性。

**参考文献:**

[1] TAN D P, JI S M, JIN M S. Intelligent Computer-aided Instruction Modeling and a Method to Optimize Study Strategies for Parallel Robot Instruction[J]. IEEE Trans. Educ,2013,56(3):268—273.

[2] KUNT E D, NASKALI A T, SABANOVIC A.Miniaturized Modular Manipulator Design for High Precision Assembly and Manipulation Tasks[C]// In The 12th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control, Sarajevo, B & H, 2012.

[3] YU D. Parallel Robots Pose Accuracy Compensation Using Back Propagation Network[J]. International Journal of Physical Science,2011,6(21):5005—5011.

[4] STAN S D, MANIC M, SZEP C, et al. Performance Analysis of 3 DOF Delta ParalleL Robot. Human System Interactions (HIS)[C]// 2011 4th International Conference on, Yokohama, Japan,2011:215—220.

[5] CAI G P, HONG J Z , YAN S X. Model Study and Active Control of a Rotating Flexible Cantilever Beam[J]. International Journal of Mechanical Sciences,2004,46:871—889.

[6] MEGAHED S M, HAMZA K T. Modeling and Simulation of Planar Flexible Link Manipulators with Rigid Rip Connections to Revolute Joints[J]. Robotica,2004,22:285—300.

[7] CHU M, CHEN G, HUANG F J, et al. Active Disturbance Rejection Control for Trajectory Tracking of Manipulator Joint with Flexibility and Friction[J]. Appl. Mech. Mater., 2013, 325—326:1229—1232.

[8] 张清华,张宪民. 平面3-RRR柔性并联机器人残余振动主动控制[J]. 农业机械学报,2013,44(2):233—237.
ZHANG Qing-hua, ZHANG Xian-min. Active Residual Vibration Control of Planar 3-RRR Flexible Parallel Robots [J]. Journal of Agricultural Machinery, 2013, 44(2):233—237.

[9] 胡俊峰,张宪民,朱大昌,等. 柔性并联机器人动力学建模[J]. 农业机械学报,2011,42(11):209—213.
HU Jun-feng, ZHANG Xian-min, ZHU Da-chang, et al. Dynamic Modeling of Flexible Parallel Robot[J]. Journal of Agricultural Machinery,2011,42(11):209—213.

[10] LI H H, YANG Z Y, HUANG T. Dynamics and Elasto-dynamics Optimization of a 2-DOF Planar Parallel Pick-and-place Robot with Flexible links[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization,2009,38(2):195—204.

[11] MAJOU F, GOSSELIN C, WENGER P, et al. Parametric Stiffness Analysis of the Orthoglide[J]. Mechanism and Machine Theory,2007,42(3):296—311.

[12] 韩亚锋,马履中,吴伟光,等. Delta并联机器人弹性动力学研究[J]. 农业机械学报,2011,42(10):198—202.
HAN Ya-feng, MA Lu-zhong, WU Wei-guang, et al. Elastic Dynamics Analysis of Delta Parallel Robot[J]. Journal of Agricultural Machinery,2011,42(10):198—202.

[13] 刘善增. 三自由度空间柔性并联机器人动力学研究[D]. 北京:北京工业大学,2009.
LIU Shan-zeng. Kinetic Study of Three Degree of Freedom Space Flexible Parallel Robot[D]. Beijing: Beijing University of Technology,2009.

[14] 杜兆才,余跃庆,苏丽颖. 柔性并联机器人动力学特性的灵敏度分析[J]. 机械科学与技术,2008,27(2):166—170.
DU Zhao-cai, YU Yue-qing, SU Li-ying. Sensitivity Analysis of Dynamics Characteristics of a Flexible Parallel Robot[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering,2008,27(2):166—170.

[15] 张向东. 完全掌握Ansys14.5有限元分析超级手册[M]. 北京:机械工业出版社,2014.
ZHANG Xiang-dong. To Fully Grasp the Ansys 14.5 Finite Element Analysis Super Handbook[M]. Beijing: China Machine Press,2014.